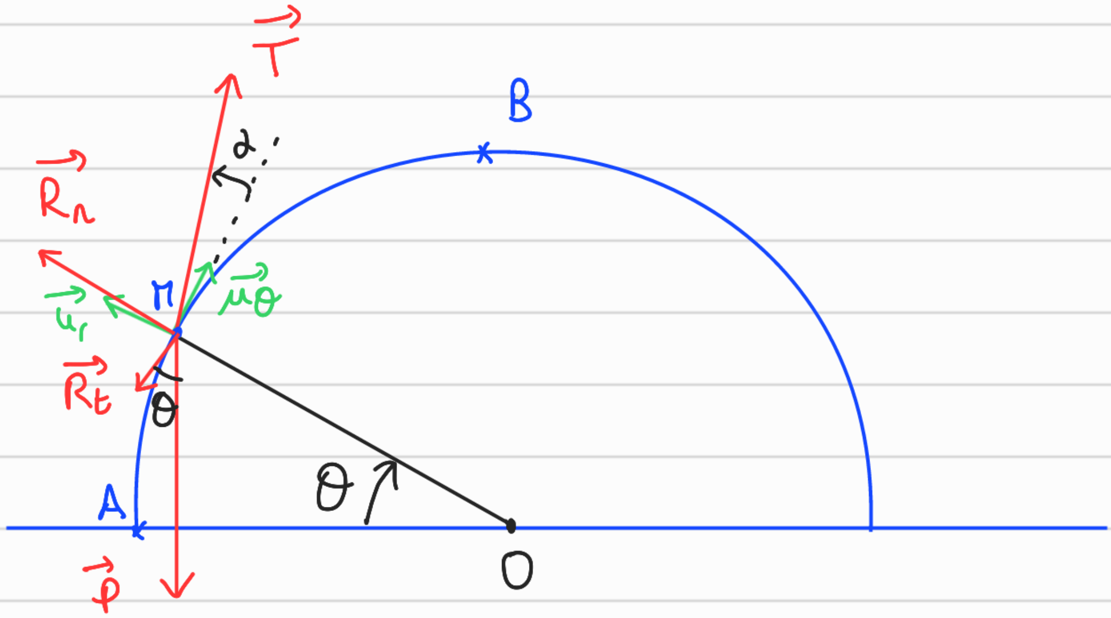
Correction du TD 9.

Exercice 1 :

Q1 On étudie le système {point M} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
On utilise une base polaire.



Q2. $W(\vec{T}) = \int_A^B \vec{T} \cdot d\vec{OM}$

avec $\vec{T} = T\cos\alpha\, \vec{u_\theta} + T\sin\alpha\, \vec{u_r}$

et $d\vec{OM} = R\,d\theta\, \vec{u_\theta}$.

Soit $W(\vec{T}) = \int_A^B TR\cos\alpha\, d\theta = TR\cos\alpha \left[\theta\right]_0^{\pi/2}$

$$\boxed{W(\vec{T}) = RT\cos\alpha \frac{\pi}{2}}$$

Q3. Pour v = cte on a $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

avec $\dot{\theta}$ = cte d'où $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$

Or d'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au système $\{M\}$: dans le référentiel terrestre galiléen, on a

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ soit $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R_n} + \vec{R_t} = m\vec{a}$

Soit en projection sur $\vec{u_r}$:

$-mg\sin\theta + T\sin\alpha + R_n = -mR\dot{\theta}^2$

Soit $\boxed{R_n = -mR\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta - T\sin\alpha}$

Q4. $\vec{F_f} = \vec{R_t}$ avec $\|\vec{F_f}\| = f \cdot \|\vec{R_n}\|$.

$W(\vec{F_f}) = \int_A^B \vec{F_f} \cdot d\vec{OM}$ avec $\vec{F_f} = -fR_n\,\vec{u_\theta}$

et $d\vec{OM} = Rd\theta\,\vec{u_\theta}$

donc $W(\vec{F_f}) = \int_A^B -fR_n \cdot R\,d\theta$

$= -fR\int_A^B \left(-mR\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta - T\sin\alpha\right)d\theta$

$$W(\vec{F_p}) = \rho R^2 m \dot{\theta}^2 [\theta]_0^{\pi/2} + \rho R m g [\cos\theta]_0^{\pi/2} + T\sin\alpha\, [\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= \rho R^2 m \dot{\theta}^2 \frac{\pi}{2} + \rho m R g\,(0-1) + T\sin\alpha\, \frac{\pi}{2} \cdot \rho R$$

avec $R\dot{\theta} = v$ on obtient :

$$W(\vec{F_p}) = \rho v^2 m \frac{\pi}{2} - \rho m g R + T\sin\alpha\, \frac{\pi}{2} \cdot \rho R$$

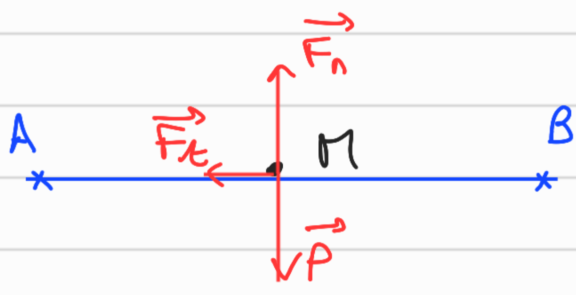
$$\boxed{W(\vec{F_p}) = m\rho v^2 \frac{\pi}{2} - \rho m R g + \rho R T \sin(\alpha) \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 2 :

Q1. On applique le T.E.C au système {voiture} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F})$$

Bilan des forces :



$$E_c(B) - E_c(A) = W(\vec{F_t})$$

car $\vec{P}$ et $\vec{F_n}$ sont orthogonaux au déplacement pendant tout le trajet.

et $E_c(B) = 0$

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = \int_A^B \vec{F_t} \cdot \overrightarrow{dOn} \quad \text{or } \vec{F_t} = -F_t \vec{u_x} = -\mu F_n \vec{u_x}$$

et $\overrightarrow{dOn} = dx$.

De plus d'après le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe (Oy) on a : $F_n = mg$.

Donc $-\frac{1}{2} m v_0^2 = \int_A^B -\mu m g \, dx = -\mu m g . D$

$$\boxed{D = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$$

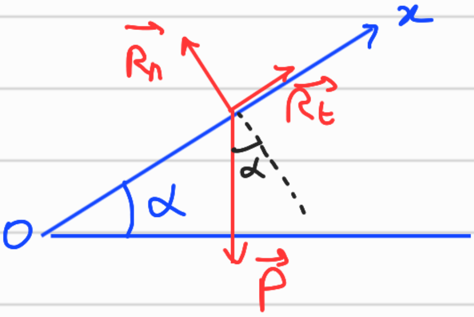
Q2. AN : $D = \frac{(140/3{,}6)^2}{2 . 0{,}6 . 10} = \underline{126 \text{ m}}$

Q3. Soit D la distance d'arrêt de la voiture lancée à 130 km/h et D' pour la voiture lancée à 110 km/h.

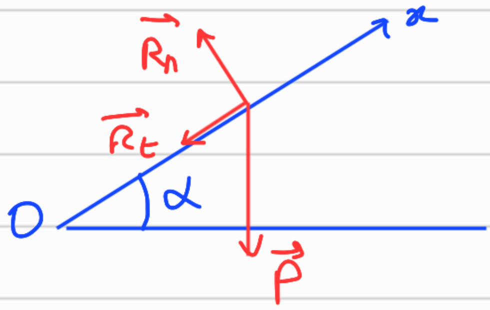
$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{v_0^2}{2\mu g} \\ D' &= \frac{v_0'^2}{2\mu g} \end{aligned}\right\} \quad \frac{D}{D'} = \frac{v_0^2}{v_0'^2}$$

Soit : $D' = D . \frac{v_0'^2}{v_0^2}$ $\quad$ $\underline{\text{AN}}$: $D' = 500 . \frac{110^2}{130^2} = \underline{358 \text{ m}}$

Q4. Si la route fait un angle α avec l'horizontale :



en descente



en montée

le TEC appliqué au système {voiture} dans le référentiel terrestre donne :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R_t})$$

avec $W(\vec{P}) = \int_A^B (-mg\sin\alpha\, \vec{u_x} - mg\cos\alpha\, \vec{u_y}) dx\, \vec{u_x}$

soit $W(\vec{P}) = \int_A^B -mg\sin\alpha\, dx = -mg\sin\alpha . D$.

et $W(\vec{R_t}) = \int_A^B R_t\, dx = \int_A^B -\mu R_n\, dx$

Et le princpe fondamental de la dynamique projeté dans la direction (Oy) donne :

$R_n = mg\cos\alpha$

Soit $W(\vec{R_t}) = \int_A^B -\mu mg\cos\alpha\, dx = -\mu mg\cos\alpha D$

On a donc $-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mg\sin\alpha D - \mu mg\cos\alpha D$

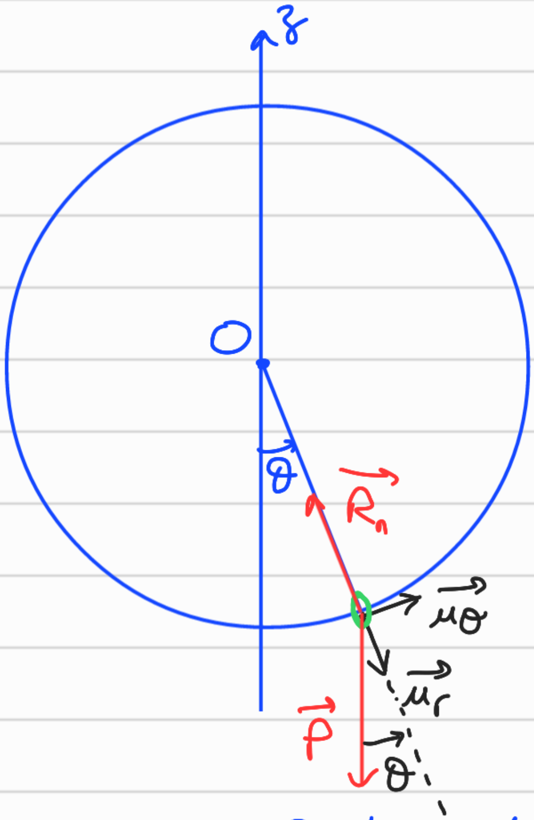
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgD(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

et $\frac{1}{2}mv_0'^2 = mgD'(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$

$$\boxed{D' = D\left(\frac{v_0^2}{v_0'^2}\right)}$$

$\Rightarrow$ même résultat que sur une route horizontale.

Exercice 3 :



Q1. Bilan des forces sur le système {anneau}

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{R_n} = -R_n\,\vec{u_r}$$

(absence de frottements donc réaction du support orthogonale au support)

Q2. $W(\vec{R_n}) = \int \vec{R_n} \cdot \vec{dOM}$

avec $\vec{dOM} = R\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

donc $W(\vec{R_n}) = \int -R_n\vec{u_r} \cdot R\,d\theta\,\vec{u_\theta} = 0$

Q3. On a $W(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{OM}$

soit $W(\vec{P}) = \int_A^B - mg \sin\theta \cdot R d\theta$

$$= - \left[-mgR\cos\theta + K \right]_A^B$$

$$= - \Delta E_{pp} \quad \text{avec} \quad E_{pp} = K - mgR\cos\theta$$

En choisissant $E_p(\theta = 0) = 0$ on a

$$0 = K - mgR \Rightarrow K = mgR$$

$$\boxed{E_{pp} = mgR(1 - \cos\theta)}$$

Q4. $E_c = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2$

Q5. D'après le théorème de l'énergie mécanique appliqué à l'anneau dans le référentiel terrestre galiléen, on a :

$\Delta E_m = 0$ car le poids est une force conservative (elle dérive d'une énergie potentielle) et la réaction du support ne travaille pas.

On a donc $E_{pp} + E_c = \text{cte}$

Soit $mgR(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 = \text{cte}$

Que l'on dérive pour obtenir l'équation du mouvement :

$$mgR\left(\sin\theta . \dot{\theta}\right) + mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

$$\boxed{g\sin\theta + R\ddot{\theta} = 0}$$

Q6. Avec l'approximmation des petits angles : $\sin\theta \approx \theta$, on obtient alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$$ qui est l'équation

d'un oscillateur harmonique de pulsation

$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}}$ et de période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

soit $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$

Exercice 4 :

Q1. Bilan des forces sur le système {vélo + cycliste} :

* poids $\vec{P} = m\vec{g}$
* réaction de la route : $\vec{R}$ (orthogonale au sol)
* force motrice horizontale de puissance P
* frottements de l'air : $\vec{F_f} = -kv.\vec{v}$.

Le théorème de la puissance cinétique appliqué au système considéré permet d'écrire :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(m\vec{g}) + P(\vec{R}) + P + P(\vec{F_f})$$

avec $P(\vec{F_i}) = \vec{F_i} \cdot \vec{v}$

Soit $\frac{dE_c}{dt} = 0 + 0 + P - kv \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}$

$$\frac{dE_c}{dt} = P - kv^3$$

avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ soit $\frac{dE_c}{dt^2} = mv \cdot \frac{dv}{dt}$

or $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$.

$$\Rightarrow \boxed{mv^2 \frac{dv}{dx} = P - kv^3}$$

Q2. $f(x) = P - kv^3$ donc $mv^2 \frac{dv}{dx} = f(x)$

et $\frac{df}{dx} = -3kv^2 \frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow v^2 \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{3k} \frac{df}{dx}$$

En injectant dans l'équation précédente on obtient :

$$-\frac{m}{3k}\frac{df}{dx} = f(x)$$

Soit $\boxed{f'(x) + \frac{3k}{m}f(x) = 0}$

Q3. C'est une équation différentielle du 1er ordre à coefficients constants, dont la solution générale est :

$$f(x) = A e^{-x/L} \quad \text{avec} \quad L = \frac{m}{3k}$$

On utilise la valeur initiale : $v(x=0) = v_0$

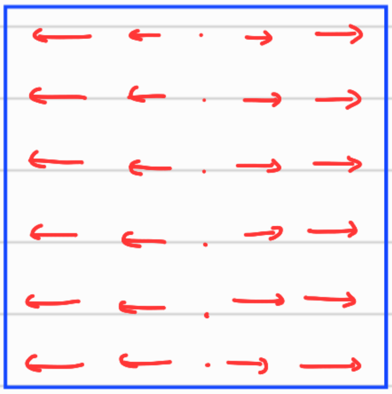
$$f(0) = P - kv_0^3 = A e^0$$

$$\Rightarrow A = P - kv_0^3$$

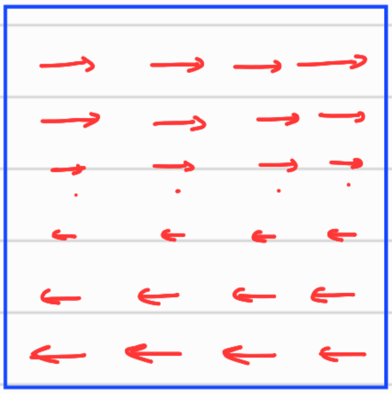
D'où $P - kv^3 = (P - kv_0^3)e^{-x/L}$

Soit $\boxed{v(x) = \left(\frac{P - (P-kv_0^3)e^{-x/L}}{k}\right)^{1/3}}$

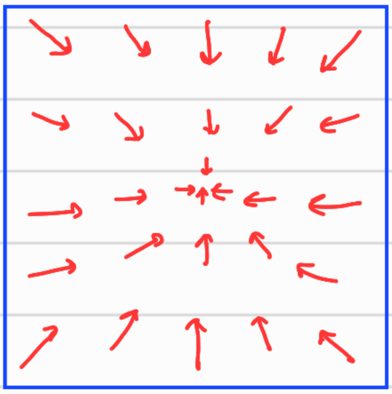
Exercice 5 :



force $\vec{F_1}$



force $\vec{F_2}$



force $\vec{F_3}$

Q1. a) $W(\vec{F_1}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_1} \cdot d\vec{OM} = \int_{M_1}^{M_2} kx\vec{e_x} \cdot (dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y})$

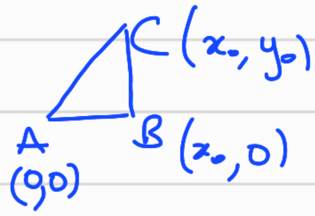
$$= \int_{M_1}^{M_2} kx\,dx = k\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) = -\left(-\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}\right)$$

$$= -(E_{p_2} - E_{p_1}) \quad \text{avec} \quad E_p = -\frac{kx^2}{2} + K$$

avec K = cte.

b) $W(\vec{F_2})$ sur le trajet ABCA avec

$A(0,0)$; $B(x_0, 0)$; $C(x_0, y_0)$



$$W(\vec{F_2}) = \underbrace{W_{AB}(\vec{F_2})}_{\substack{= 0 \text{ car} \\ y=0 \text{ sur} \\ \text{tout le} \\ \text{trajet AB}}} + \underbrace{W_{BC}(\vec{F_2})}_{\substack{= 0 \text{ car} \\ \vec{F_2} \text{ est} \\ \text{orthogonale} \\ \text{au déplacement}}} + \underbrace{W_{CA}(\vec{F_2})}_{= \int_C^A \vec{F_2} \cdot \vec{dl}}$$

avec sur CA $\quad \vec{dl} = -\dfrac{y_0}{x_0} dx \, \vec{e_y} - \dfrac{x_0}{y_0} dy \, \vec{e_z}$

d'où $\quad W(\vec{F_2}) = \displaystyle\int_C^A -ky \cdot \frac{x_0}{y_0} dy = -\frac{k x_0}{y_0} \left[\frac{y^2}{2} \right]_C^A$

$$W(\vec{F_2}) = -\frac{k x_0}{y_0} \left(\frac{y_0^2}{2} - 0 \right) = -\frac{k x_0 y_0}{2}$$

Le travail sur le trajet fermé ABCA vaut donc $W(\vec{F_2}) = -\dfrac{k x_0 y_0}{2}$ donc n'est pas nul.

$\rightarrow$ le travail pour aller de A à C dépend donc du chemin suivi : W_{AC} en passant par B est différent de W_{AC} en allant "tout droit".

La force $\vec{F_2}$ n'est donc pas conservative.

Q2 a) Pour un déplacement élémentaire

$dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y}$ on a :

$$\delta W(\vec{F_3}) = -k\left(x\vec{e_x} + y\vec{e_y}\right)\left(dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y}\right)$$

$$= -kx\,dx - ky\,dy.$$

Pour un déplacement d'un point $M_1(x_1, y_1)$ à un point $M_2(x_2, y_2)$ on a donc

$$W(\vec{F_3}) = \int_{M_1}^{M_2} -kx\,dx - ky\,dy = \left[-\frac{kx^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} + \left[-\frac{ky^2}{2}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= -k\,\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - k\,\frac{y_2^2 - y_1^2}{2}$$

$$= -\frac{k}{2}\left(x_2^2 + y_2^2 - \left(x_1^2 + y_1^2\right)\right)$$

$$= -\left(E_p(M_2) - E_p(M_1)\right)$$

avec $E_p = \left(x^2 + y^2\right) \times \frac{k}{2}$

donc $\vec{F_3}$ est bien conservative.

b) On a bien $\vec{F_3} = -\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{e_y}$

c) En coordonnées polaires $x^2+y^2=r^2$

donc $E_p(r) = \frac{kr^2}{2}$.

c'est l'énergie potentielle d'un ressort idéal de longueur à vide nulle et dont une des extrémités est l'origine du repère

Exercice 6 :

Q1. Système {voiture} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$
$\vec{R_n}$ orthogonale au support.

On néglige les frottements donc l'énergie mécanique du système se conserve :

$E_m(O) = E_m(A)$ avec A = point en bas de la descente.

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

or $v_o = 0$ et $h_A = 0$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_A^2 \Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{2gh}}$$

Q2. $dE_{pp} = -\delta W(\vec{P}) = -m\vec{g} \cdot d\vec{OM}$
$= mg\vec{u_z} \cdot dz\vec{u_z}$

$dE_{pp} = mg\,dz$

Soit $E_{pp} = mgz + k$ avec $k = cte$

telle que $E_{pp}(z=0) = 0 \Rightarrow k = 0$

$E_{pp} = mgz$ or $z = R(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow E_{pp} = mgR(1-\cos\theta)$

La conservation de l'énergie mécanique donne :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m(R\dot{\theta})^2 + mgR(1-\cos\theta)$$

$$v_0^2 - R^2\dot{\theta}^2 - 2gR(1-\cos\theta) = 0$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\theta - 1)}$$

Q3. On applique la 2ème loi de Newton au système {voiture} et on la projette sur $\vec{u_r}$:

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u_r}$

et $\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

D'où $mg\cos\theta - R = -mR\dot{\theta}^2$

$$R = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

on injecte l'expression précédente de $\dot{\theta}^2$:

$$R = mR\left(\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\theta - 1)\right) + mg\cos\theta$$

$$R = \frac{mv_0^2}{R} + 2mg(\cos\theta - 1) + mg\cos\theta$$

$$\boxed{R = m\left(\frac{v_0^2}{R} + 3g\cos\theta - 2g\right)}$$

Q4. La bille reste en contact avec le support tant que $R > 0$ soit

$$m\left(\frac{v_0^2}{R} + 3g\cos\theta - 2g\right) > 0$$

$$\frac{v_0^2}{R} > 2g - 3g\cos\theta$$

$$v_0 > \sqrt{Rg(2 - 3\cos\theta)}$$

or $\sqrt{Rg(2-3\cos\theta)}$ est maximale pour $\theta = \pi$

et alors $\boxed{v_{lim} = \sqrt{5Rg}}$

Or on a montré à la question Q1 que $v_0 = \sqrt{2gh}$.

Il faut donc $\sqrt{2gh_{min}} = \sqrt{5Rg}$

soit $\boxed{h_{min} = \frac{5}{2}R}$

AN: $\underline{h_{min} = 75 \text{ cm}}$

Q5. La bille décolle du support et tombe pour θ_d tel que $R(\theta_d) = 0$

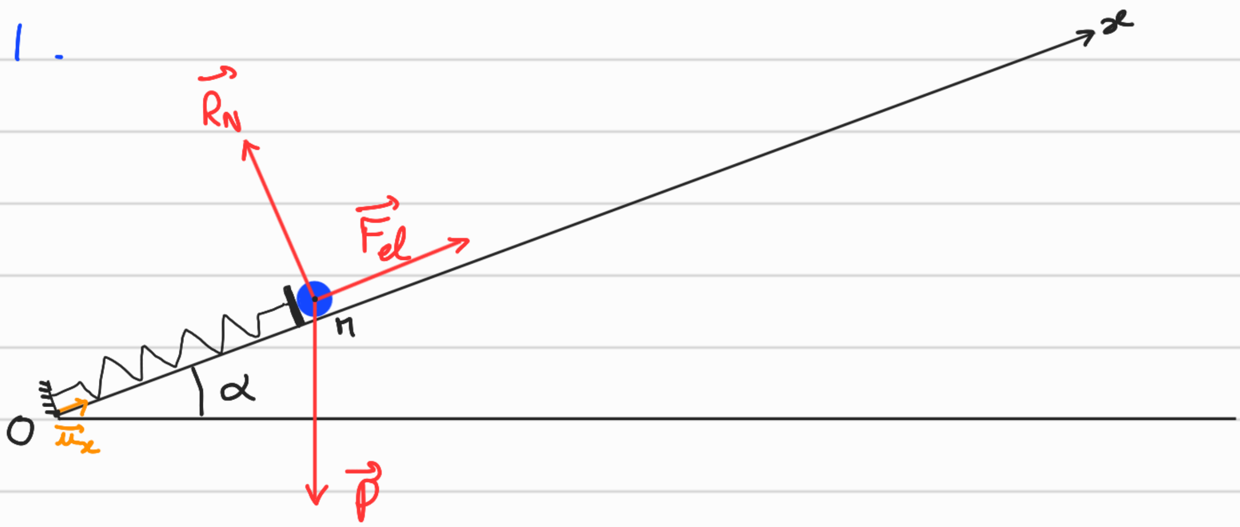
Soit $0 = m\left(\frac{v_0^2}{R} + 3g\cos\theta_d - 2g\right)$

$$3g\cos\theta_d = 2g - \frac{v_0^2}{R}$$

$$\boxed{\cos\theta_d = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3Rg}}$$

Exercice 7 :

Q1.



On étudie le système {bille} modélisé par le point matériel M dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

* poids $\vec{P} = m\vec{g}$
* réaction du support : $\vec{R_N}$
* force de rappel élastique : $\vec{F_{el}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_x}$
avec ℓ = longueur du ressort à l'instant t.
L'origine du repère étant à l'extrémité du ressort $\ell(t) = x \Rightarrow \vec{F_{el}} = -k(x - \ell_0)\vec{u_x}$

* Energie potentielle de pesanteur :
$E_{pp} = mgh + K$ avec $h = \ell \sin\alpha = x \sin\alpha$
et $K = cte$.

$E_{pp} = mgx\sin\alpha + K$
or $E_{pp}(x=0) = 0$

$$\boxed{E_{pp} = mgx\sin\alpha}$$

* Energie potentielle élastique :

$E_{pel} = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 + K'$ avec $K' = cte$

or $E_{pp}(x = l_0) = 0 \Rightarrow K' = 0$

$\boxed{E_{pel} = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2}$ valable pour $x < l_0$.

Q2. $E_p(M) = E_{pp} + E_{pel}$

* pour $x < l_0$ $E_p(M) = mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$

AN : $E_p(M) = 0{,}150 \times 9{,}81 \times x \times \sin(6) + 1/2 \cdot 40\,(x - 0{,}10)^2$

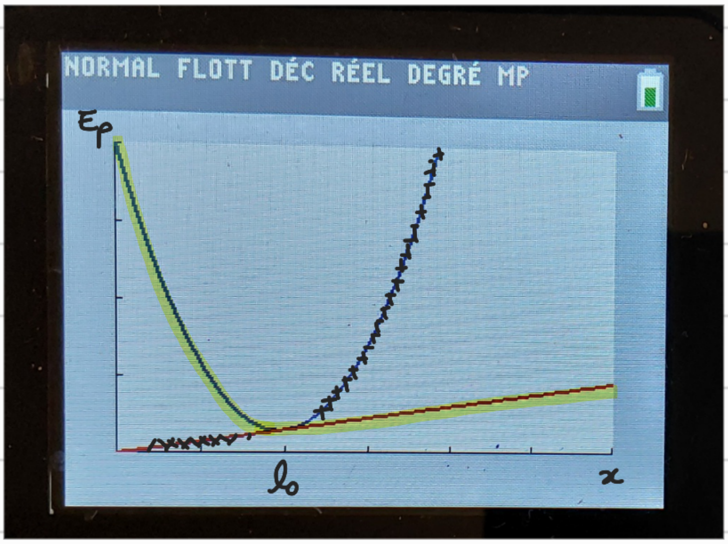
$= 0{,}154 \cdot x + 20x^2 + 0{,}2 - 4x$

$= 20x^2 - 3{,}846\,x + 0{,}2$

* pour $x > l_0$ $E_p(M) = mgx\sin\alpha$.

AN : $E_p(M) = 0{,}150 \times 9{,}81 \times x \times \sin 6$

$= 0{,}154\,x$.



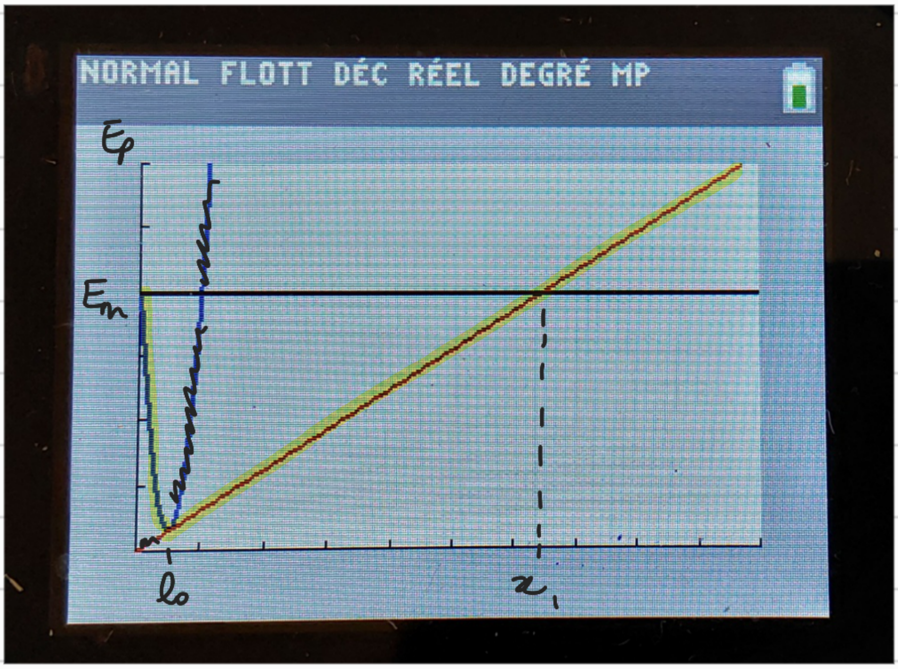
$\lim_{x \to +\infty} E_p = +\infty$ donc il n'existe pas d'énergie mécanique telle que $E_m > E_{pp}$ pour $x \to +\infty$. $\Rightarrow$ pas d'état libre possible

A l'état initial :

* $E_{pp} = 0$ (ressort comprimé au maximum et on considère $x = 0$)
* $E_{pel} = \frac{1}{2} k \ell_0^2$
* $E_c = 0$ (bille lâchée sans vitesse initiale)

donc $E_m(0) = \frac{1}{2} k \ell_0^2$.

AN : $E_m(0) = 0{,}5 \cdot 40 \times 0{,}10^2 = 0{,}2$ J



E_m est constante car la bille est soumise à 2 forces conservatives ($\vec{P}$ et $\vec{F_{el}}$) et une force qui ne travaille pas.

Point de vitesse nulle : $x = 0$

$x = x_1$ pour $E_m = E_p$

Point de vitesse maximale : $x = l_0$ pour E_p minimale

Q3. La bille quitte le ressort pour $x = l_0$.

On a alors $E_p = m g l_0 \sin \alpha$

D'où $E_c = \frac{1}{2} k l_0^2 - m g l_0 \sin \alpha$

Soit $\frac{1}{2} m v_{l_0}^2 = \frac{1}{2} k l_0^2 - m g l_0 \sin \alpha$

$v_0^2 = \frac{k}{m} l_0^2 - 2 g l_0 \sin \alpha$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{k}{m} l_0^2 - 2 g l_0 \sin \alpha}}$$

AN : $v_0 = \sqrt{\frac{40}{0{,}150} \times 0{,}1^2 - 2.9{,}8.0{,}10.\sin 6} = \underline{1{,}6 \text{ m.s}^{-1}}$

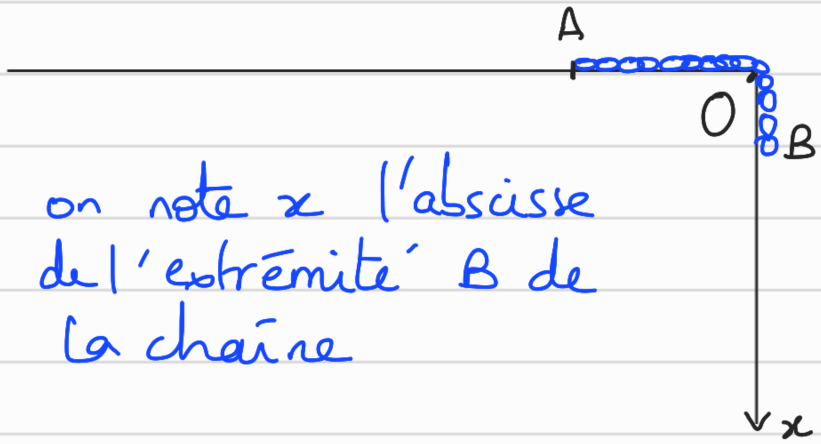
Q4. La distance maximale atteinte (x_1) par la bille est telle que :

$E_m = m g x_1 \sin \alpha$

$$\boxed{x_1 = \frac{k l_0^2}{2 m g \sin \alpha}}$$

AN : $x_1 = \frac{40.0{,}1^2}{2.0{,}150.9{,}8.\sin 6} = \underline{1{,}3 \text{ m}}$.

Exercice 8 :



Bilan des forces :
* $\vec{P} = m\vec{g}$
* $\vec{R_N}$ sur la partie horizontale

on note x l'abscisse de l'extrémité B de la chaîne

Q1. Cette chaîne subit une force conservative et une force qui ne travaille pas ($\vec{R_N} \perp$ déplacement).

Donc $E_m = cte$.

* $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ avec $m = \lambda L$ et $v = \dot{x}$

soit $E_c = \frac{1}{2} \lambda L \dot{x}^2$

* $E_{pp} = -m' g h' + E_p(0)$

avec $E_p(0)$ = énergie potentielle lorsque toute la chaîne est posée sur la table.
et m' = masse de la partie verticale de la chaîne $m' = x . \lambda$
h' = centre de masse de la partie verticale de la chaîne : $h' = \frac{x}{2}$

Soit $E_{pp} = -\lambda g x . \frac{x}{2} + E_p(0)$

$$E_{pp} = -\lambda g \frac{x^2}{2} + E_p(0).$$

On a donc $\frac{1}{2}\lambda L \dot{x}^2 - \lambda g \frac{x^2}{2} + E_p(0) = cte.$

Soit $\lambda L \dot{x}\ddot{x} - \lambda g \dot{x} x = 0$

$$\boxed{\ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0}$$

Q2. Le PFD appliqué au système {chaine} dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{P}' = 0$

avec $\vec{P}$ = poids de la partie horizontale de la chaine : $\vec{P} = (m-m')\vec{g}$

$\vec{P}'$ = poids de la partie verticale de la chaine : $\vec{P} = m'\vec{g}$.

En projetant sur l'axe horizontal :

$\vec{P} + \vec{R_N} = \vec{0}$

Il reste donc $m\ddot{x} = m'g$

Soit $\lambda . L\ddot{x} = \lambda x g$

$$\boxed{\ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0}$$

Q3. $\ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0$

on pose $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

La solution de cette équation différentielle est $x(t) = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$

(discriminant du polynôme caractéristique >0)

On détermine les constantes avec les conditions initiales : à $t=0$ $x(0) = l_0$ et $\dot{x}(0) = 0$

$$\begin{cases} l_0 = A + B \\ 0 = (A-B)\omega_0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{l_0}{2}$$

$$x = \frac{l_0}{2}\left(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}\right)$$

$$\boxed{x = l_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)}$$

Exercice 9

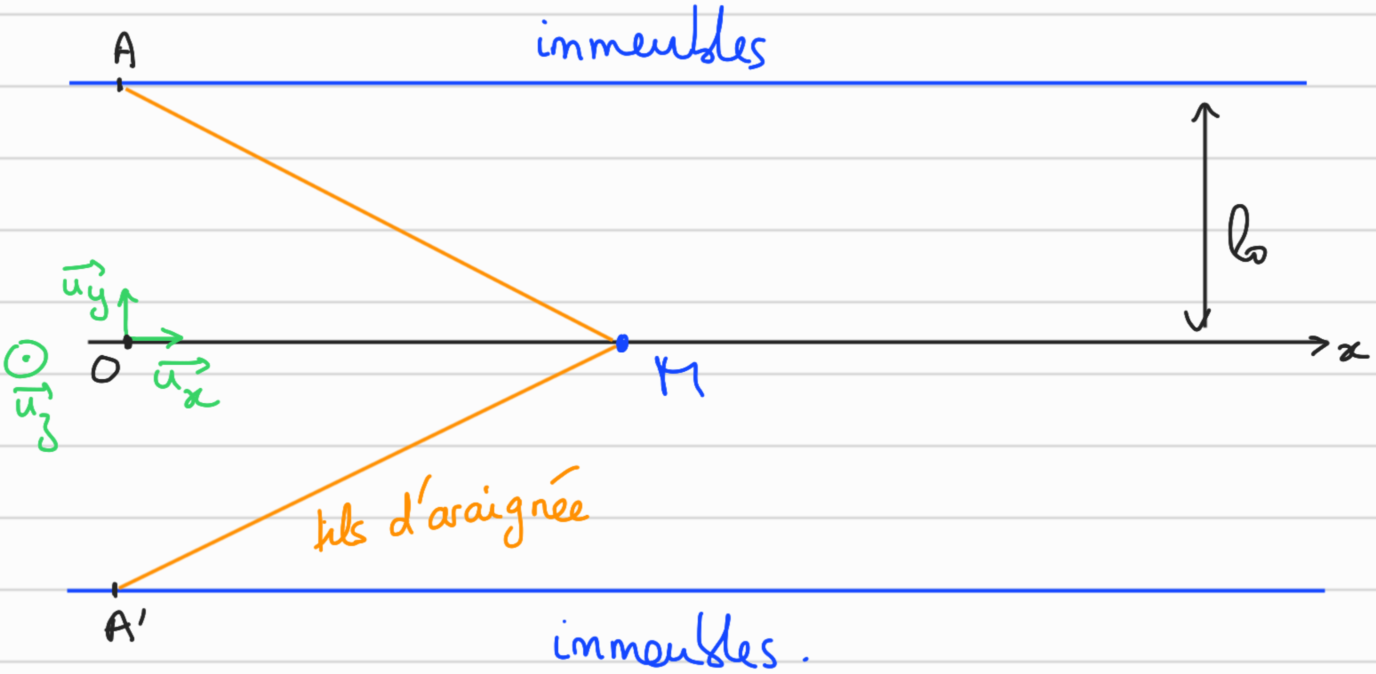
* Système étudié : {Spider-Man + rame} de masse $\underbrace{36{,}8.10^3 \times 6}_{\text{6 wagons}} + \underbrace{246 \times 6 \times 70}_{\text{246 passagers par wagon}} = 3{,}2.10^5\,kg$

* L'étude est faite dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

* Hypothèse : mouvement rectiligne et horizontal pendant la phase de freinage

* Choix du système de coordonnées : cartésien, l'axe Ox dirigé suivant le mouvement du train, l'origine O étant positionnée à la position du train au début du freinage.

* Schéma :



Bilan des forces sur {Spiderman + rame}

* poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
$\vec{P}$ ne travaille pas car cette force est perpendiculaire au déplacement pendant tout le trajet

* réaction du support $\vec{R}_N$: les frottement sont négligés, la réaction est normale au support donc ne travaille pas.

* La tension de chaque fil de soie d'araignée modélisée par une force de rappel élastique de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. Cette force est conservative. L'énergie potentielle pour les 2 fils s'écrit :
$E_{pel} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \times 2$

avec $l = \sqrt{l_0^2 + x^2}$ d'après le théorème de Pythagore

Soit $E_{pel} = k\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right)^2$

* On applique le théorème de l'énergie mécanique au système {Spiderman + rame} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{nc})$ or les forces non conservatives ici ne travaillent pas car elles sont orthogonales au déplacement.

Donc $\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow E_m = cte$

Soit $\frac{1}{2}mv^2 + k\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$

Donc $$v^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{m v_0^2}{2} - k\left(\sqrt{l_0^2+x^2} - l_0\right)^2\right)$$

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2k}{m}\left(\sqrt{l_0^2+x^2} - l_0\right)^2$$

* le train s'arrête en x_f lorsque $v=0$ soit

$$v_0^2 = \frac{2k}{m}\left(\sqrt{l_0^2+x_f^2} - l_0\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{m}{2k}}\, v_0 = \sqrt{l_0^2+x_f^2} - l_0$$

$$l_0^2 + x_f^2 = \left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}}\, v_0\right)^2$$

$$x_f^2 = \left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}}\, v_0\right)^2 - l_0^2$$

$$x_f = \sqrt{\left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}}\, v_0\right)^2 - l_0^2} \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ On utilisera x_f pour calculer F_{max}
car $F_{max} = k\left(\sqrt{x_f^2 + l_0^2} - l_0\right)$

$$F_{max} = k\left(\sqrt{x_f^2\left(1+\left(\frac{l_0}{x_f}\right)^2\right)} - l_0\right)$$

or étant donnée la vitesse initiale :

$v_0 = 80\,\text{mph}$ soit $128\,\text{km/h}$ soit $36\,\text{m/s}$

et $\ell_0 \simeq 10\,\text{m}$ (demi-largeur de la route)

On peut supposer que $x_f \gg \ell_0$ (il lui faut près d'une minute pour arrêter le train).

d'où un approximation pour F_{max} :

$F_{max} \approx k(x_f - \ell_0) \approx k x_f$.

* Il faut déterminer k. Pour cela on va utiliser le fait que le train met environ 1 minute pour s'arrêter, or $t_F = \int dt$.

Avec $v = \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \dfrac{2k}{m}\left(\sqrt{\ell_0^2 + x^2} - \ell_0\right)^2}$

Soit $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{m}\left(\sqrt{\ell_0^2+x^2} - \ell_0\right)^2}} = \dfrac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{m}\left(x\sqrt{1+\left(\frac{\ell_0}{x}\right)^2} - \ell_0\right)^2}}$

On utilise à nouveau l'hypothèse $x \gg \ell_0$

Soit $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{m}x^2}} = \dfrac{dx}{v_0\sqrt{1 - \frac{2kx^2}{mv_0^2}}}$

Et $t_F = \dfrac{1}{v_0} \displaystyle\int_0^{x_F} \dfrac{dx}{\sqrt{1 - \frac{2kx^2}{mv_0^2}}}$

or $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

On effectue un changement de variable :

$X = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}\dfrac{x}{v_0}$

$dX = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}\dfrac{dx}{v_0} \Rightarrow dx = v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}\,dX$

et $t_F = \sqrt{\dfrac{m}{2k}} \displaystyle\int_0^{X_F} \dfrac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \sqrt{\dfrac{m}{2k}}\left[\arcsin X\right]_0^{X_F}$

avec $X_F = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}\dfrac{x_F}{v_0}$

$t_F = \sqrt{\dfrac{m}{2k}}\left(\arcsin\sqrt{\dfrac{2k}{m}}\dfrac{x_F}{v_0} - \arcsin 0\right)$

or d'après (1) $x_f = \sqrt{\left(\ell_0 + \sqrt{\dfrac{m}{2k}}v_0\right)^2 - \ell_0^2}$

Et avec l'hypothèse $x_F \gg l_0$ on a

$$x_F \approx \sqrt{\frac{m}{2k}}\, v_0$$

d'où $t_F = \sqrt{\frac{m}{2k}} \left(\arcsin 1 - \arcsin 0 \right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$

Soit $\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{1}{t_F}$

$$k = \left(\frac{\pi}{2 t_F} \right)^2 \times \frac{m}{2}$$

$$\boxed{k = \frac{\pi^2 m}{8 t_F^2}}$$

AN : $k = \frac{\pi^2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^5}{8 \cdot 60^2} = \underline{1{,}1 \cdot 10^2\ N.m^{-1}}$

et $x_F = \sqrt{\frac{3{,}2 \cdot 10^5}{2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^2}} \cdot 36 = \underline{1{,}4 \cdot 10^3\ m}$.

D'où $F_{max} = 1{,}1 \cdot 10^2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 = \underline{1{,}5 \cdot 10^5\ N}$